



Stefan Klößner

# Zeitstetige Modellierung von Preisprozessen auf Finanzmärkten

Zur Interpretation und Notwendigkeit  
der *Usual Conditions*



GABLER EDITION WISSENSCHAFT

Stefan Klößner

**Zeitstetige Modellierung von  
Preisprozessen auf Finanzmärkten**

# GABLER EDITION WISSENSCHAFT

Stefan Klößner

# **Zeitstetige Modellierung von Preisprozessen auf Finanzmärkten**

Zur Interpretation und Notwendigkeit  
der *Usual Conditions*

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Volker Steinmetz

Deutscher Universitäts-Verlag

**Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek**  
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen  
Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über  
<<http://dnb.ddb.de>> abrufbar.

Dissertation Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 2005

1. Auflage Juni 2005

Alle Rechte vorbehalten

© Deutscher Universitäts-Verlag/GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2005

Lektorat: Brigitte Siegel / Nicole Schweitzer

Der Deutsche Universitäts-Verlag ist ein Unternehmen von  
Springer Science+Business Media.  
[www.duv.de](http://www.duv.de)



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: Regine Zimmer, Dipl.-Designerin, Frankfurt/Main

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

ISBN-13: 978-3-8350-0028-5 e-ISBN-13: 978-3-322-82067-9  
DOI: 10.1007/978-3-322-82067-9

# Geleitwort

In der Frankfurter Allgemeinen konnte man am 7.12.2004 lesen: „... Statt direkt in Aktien ... zu investieren, setzen sie (viele Privatanleger) auf derivative Finanzinstrumente. Diese versprechen ansehnliche Renditemöglichkeiten ..., wobei sich die Verluste auf ein vorgegebenes Maß begrenzen lassen. Die Umsätze in Derivaten ... eilen hierzulande von einem Rekord zum nächsten. ...“

Dieses Zitat weist auf die Bedeutung von Derivaten für Anleger auf Finanzmärkten hin, zugleich aber auch auf die Notwendigkeit, bei der Entscheidung über Kauf und Verkauf derartiger Titel die Unsicherheit der zukünftigen Preisentwicklung zu berücksichtigen, um ein in einem zu präzisierenden Sinne „optimales“ Ergebnis zu erzielen. Zur Analyse derartiger Entscheidungssituationen bildet man den interessierenden Ausschnitt aus der ökonomischen Erscheinungswelt durch ein mathematisches Modell ab, das auf einem Bündel geeigneter Annahmen aufbaut. Bei häufig verwendeten Modellen werden diese Annahmen vielfach kaum hinterfragt, sie werden dann als „bewährt“, „technisch“ oder „wenig restriktiv“ akzeptiert.

Ein Standardmodell zur Analyse von Entscheidungssituationen auf Kapitalmärkten ist der auf Arrow und Debreu zurückgehende „Zustands-Präferenz-Ansatz“, in dessen Annahmenkatalog die sogenannten „Usual Conditions“ im Fall stetiger Zeit von zentraler Bedeutung sind, aber bisher nicht ausführlich diskutiert wurden. Nachdem in der vorliegenden Arbeit der Zustands-Präferenz-Ansatz detailliert vorgestellt worden ist, wird zunächst dargelegt, daß die Usual Conditions mit den übrigen Modellannahmen nur unbefriedigend harmonisieren und ihre Anwendung in dieser Hinsicht schlecht zu rechtfertigen ist. Es gelingt — unter Modifikation der Theorie der Stochastischen Integration — zu zeigen, daß der Zustands-Präferenz-Ansatz in einer Version ohne Usual Conditions ein sinnvolles Modell zur Analyse von Entscheidungssituationen auf Finanzmärkten ist.

Stefan Klößner wendet sich mit seiner Arbeit an alle, die sich mit den Grundlagen der Theorie der derivativen Finanzinstrumente auf anspruchsvollem mathematischen Niveau auseinandersetzen wollen. Ihm ist es dabei gelungen, die theoretischen Überlegungen geschickt zu motivieren und anschaulich zu erläutern.

Volker Steinmetz

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit wurde im Frühjahr 2005 von der rechts- und wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Universität des Saarlandes als Dissertation angenommen. Sie entstand in der Zeit von Oktober 2001 bis Oktober 2004 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Statistik und Ökonometrie von Prof. Dr. Volker Steinmetz.

Zunächst möchte ich mich bei meinem Doktorvater Prof. Dr. Volker Steinmetz dafür bedanken, daß er mir die Möglichkeit gegeben hat, meinen Forscherdrang frei auszuleben. Außerdem gilt ihm mein Dank für die Betreuung und Begutachtung der Arbeit. Weiter danke ich Herrn Prof. Dr. Ralph Friedmann für die Übernahme des Zweitgutachtens sowie einige anregende Diskussionen, nicht zuletzt auch während des Ganges zur Mensa. Ferner gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. Alfred K. Louis, der es mir ermöglicht hat, mich bereits im Rahmen meiner Diplomarbeit in Mathematik mit der Bewertung derivativer Finanzinstrumente zu befassen, so daß ich ohne Reibungsverluste Mathematik- und Promotionsstudium miteinander verbinden konnte.

Ein Promotionsprojekt an einem Lehrstuhl findet selbstverständlich in einem sozialen Umfeld statt, diesbezüglich hatte ich großes Glück. Das Arbeitsklima am Lehrstuhl von Prof. Dr. Steinmetz war stets hervorragend, wofür ich mich bei Frau Marlene Cappel, Herrn Prof. Dr. Lieblang, Herrn Dr. Klaus Petry, Herrn Dr. Christoph Stahl sowie Herrn Privatdozent Dr. Volker Krätschmer herzlich bedanken möchte. Sie alle hatten stets ein offenes Ohr, wenn mal etwas nicht so lief, wie es sollte, sei es beruflicher oder auch privater Natur. Dies trifft ebenso zu auf den Leiter des Lehrstabs Statistik, Herrn Dr. Rolf Hauser, der darüber hinaus als Fachmann in Sachen  $\LaTeX$  eine große Hilfe beim Erstellen dieses Manuskripts gewesen ist, auch ihm gilt deshalb mein aufrichtiger Dank.



Bedanken möchte ich mich schließlich auch bei Herrn Dipl.-Kfm. Martin Becker, der nicht nur beim Korrekturlesen des Manuskripts, sondern auch als Experte bei allen computertechnischen Fragen und Problemen eine große Hilfe war, sowie bei Frau Vers.-Kffr. Sabine Martin, die etliche Varianten des Manuskripts Korrektur gelesen hat.

Last but not least gebührt der größte Dank meinen Eltern, die mir immer mit Rat und Tat zur Seite gestanden und mich stets bedingungslos unterstützt haben. Ohne sie wäre ich niemals so weit gekommen. Aus diesem Grund ist die vorliegende Arbeit ihnen gewidmet.

Stefan Klößner

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>XI</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>XIII</b>
Allgemeine Symbole . . . . .	XIII
Spezifische Symbole . . . . .	XVI
<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Grundlagen der Bewertung derivativer Finanzinstrumente: Der Status Quo</b>	<b>5</b>
1.1 Derivative Finanzinstrumente . . . . .	5
1.2 Der Zustands-Präferenz-Ansatz . . . . .	11
<b>2 Die Konsequenzen der Usual Conditions</b>	<b>23</b>
2.1 Zur Vollständigkeit von $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . . . . .	23
2.2 Zur rechtsseitigen Stetigkeit von $\mathbb{F}$ . . . . .	25
2.3 Zur Vollständigkeit von $\mathbb{F}$ . . . . .	30
<b>3 Modellierung von Information</b>	<b>33</b>
3.1 Eine bemerkenswerte $\sigma$ -Algebra . . . . .	33
3.2 Der in der Spieltheorie übliche Ansatz: Informations-Partitionen . . . . .	37
3.3 Partitionen vs. $\sigma$ -Algebren . . . . .	46
<b>4 Die Bedeutung von <math>\mathcal{F}</math> und <math>P</math></b>	<b>53</b>
4.1 Wie interpretiert man $\mathcal{F}$ ? . . . . .	53
4.2 Welche Bedeutung kommt $P$ zu? . . . . .	58
<b>5 Eine alternative Modellierung</b>	<b>59</b>
5.1 Ein (fast) wahrscheinlichkeitsfreier Ansatz . . . . .	60
5.2 $\sigma$ -Algebren, die von Partitionen stammen . . . . .	65
5.3 Zusammenfassung des Modells . . . . .	71

<b>6</b>	<b>Stochastische Integration</b>	<b>75</b>
6.1	Elementare Handelsstrategien und Eigenschaften des Preisprozesses $S$ . . . . .	78
6.2	Semimartingale . . . . .	91
6.3	Allgemeine Handelsstrategien und ihr Handelserfolg . . . . .	96
6.4	Die Semimartingal-Topologie sowie noch allgemeinere Handelsstrategien und deren Handelserfolg . . . . .	107
6.5	Der Zusammenhang mit dem Integral unter den Usual Conditions	116
<b>7</b>	<b>Komplettierung des Modells</b>	<b>125</b>
7.1	Zulässige Handelsstrategien und Arbitrage . . . . .	125
7.2	Bewertung von derivativen Finanzinstrumenten . . . . .	130
<b>8</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>133</b>
<b>A</b>	<b>Mathematischer Anhang</b>	<b>137</b>
A.1	Zu Kapitel 1 . . . . .	137
A.2	Zu Kapitel 3 . . . . .	141
A.2.1	Zu Abschnitt 3.1 . . . . .	141
A.2.2	Zu Abschnitt 3.2 . . . . .	146
A.2.3	Zu Abschnitt 3.3 . . . . .	148
A.3	Zu Kapitel 5 . . . . .	151
A.3.1	Zu Abschnitt 5.1 . . . . .	151
A.3.2	Zu Abschnitt 5.2 . . . . .	152
A.4	Zu Kapitel 6 . . . . .	154
A.4.1	Zu Abschnitt 6.1 . . . . .	154
A.4.2	Zu Abschnitt 6.3 . . . . .	155
A.4.3	Zu Abschnitt 6.4 . . . . .	157
A.4.4	Zu Abschnitt 6.5 . . . . .	160
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>161</b>

# Abkürzungsverzeichnis

a.a.O.	am angegebenen Ort
AG	Aktiengesellschaft
Aufl.	Auflage
BMW	Bayerische Motoren Werke
bzgl.	bezüglich
bzw.	beziehungsweise
ca.	circa
CRC	Chemical Rubber Company
DAX	Deutscher Aktienindex
d.h.	das heißt
et al.	und andere
f	folgende
ff	fortfolgende
f.s.	fast sicher
gem.	gemäß
ggf.	gegebenenfalls
Hrsg.	Herausgeber
i.a.	im allgemeinen
i.e.S.	im engeren Sinne
i.w.S.	im weiteren Sinne
korr.	korrigiert
MIT	Massachusetts Institute of Technology
Nr.	Nummer
o.a.	oben angeführt
o.B.d.A.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
S.	Seite

u.a.	unter anderem
v.	von
vgl.	vergleiche
Vol.	Volume
vs.	versus
WWW	World Wide Web
z.B.	zum Beispiel
zugl.	zugleich

# Symbolverzeichnis

## Allgemeine Symbole

$\text{€}$	Euro
$\text{\$}$	Dollar
$\emptyset$	Leere Menge
$\forall$	Allquantor
$\exists$	Existenzquantor
$\infty$	Unendlich
$\xrightarrow{n \rightarrow \infty}$	Limes für $n$ gegen $\infty$
$\uparrow$	Monoton wachsender Limes
$\Rightarrow, \Leftarrow$	Implikation
$\Leftrightarrow$	Äquivalenz
$:\Leftrightarrow$	Definitionsgemäße Äquivalenz
$\wedge$	Logisches Und bzw. Minimum
$\vee$	Logisches Oder bzw. Maximum
$\in, \ni$	Element-Relation
$\subseteq$	Teilmengen-Relation
$\supseteq$	Obermengen-Relation
$\not\subseteq$	Negation der Teilmengen-Relation
$\not\supseteq$	Negation der Obermengen-Relation
$\subsetneq$	Strikte Teilmengen-Relation
$\supsetneq$	Strikte Obermengen-Relation
$\cap$	Durchschnitt zweier Mengen
$\cup$	Vereinigung zweier Mengen
$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{J}} A_\alpha$	Durchschnitt aller $A_\alpha$ mit $\alpha$ aus $\mathcal{J}$
$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{J}} A_\alpha$	Vereinigung aller $A_\alpha$ mit $\alpha$ aus $\mathcal{J}$